第17講　不定積分，定積分

PART1　定積分の性質

1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt-\int_{2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

Point Pickup

(1) $\displaystyle\int_a^b\{kf(x)\pm lg(x)\}dx=k\int_a^b f(x)dx\pm l\int_a^b g(x)dx$ (複号同順)

を用いて，定積分の計算を項ごとに行うことができる。

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$　および　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

を用いて，1つの定積分にまとめることができる。

また，n が奇数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=0$　　n が偶数のとき $\displaystyle\int_{-a}^{a}x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$

第17講　PART1　確認問題

次の定積分を求めよ。

1 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx=$ ア

2 $\displaystyle\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)\,dt+\int_{3}^{-1}(3t^2+2)(1-3t)\,dt$

$=$ イウエ

第 17 講　不定積分，定積分

PART1　定積分の性質

1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt-\int_{2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

(1) $$\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-3}^{1}$$
$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2+1\right)-\left\{\frac{2}{3}\cdot(-3)^3+\frac{1}{2}\cdot(-3)^2+(-3)\right\}=\frac{56}{3}$$

（別解）

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx=\int_{-3}^{1}2x^2\,dx+\int_{-3}^{1}xdx+\int_{-3}^{1}dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-3}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^{1}+[x]_{-3}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}\{1^3-(-3)^3\}+\frac{1}{2}\{1^2-(-3)^2\}+\{1-(-3)\}=\frac{56}{3}$$

(2) $$\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt-\int_{2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt=\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt$$
$$=\int_{-2}^{2}(t+1)(t^2-1)dt=\int_{-2}^{2}(t^3+t^2-t-1)dt$$
$$=2\int_{0}^{2}(t^2-1)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{0}^{2}=2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{4}{3}$$

第 17 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：9

[解説]

$$\int_{-1}^{2}\left(3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(2^3-\frac{1}{3}\cdot 2^2+\frac{1}{3}\cdot 2\right)$$

$$-\left\{(-1)^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(-1)\right\} \quad \text{[A]}$$

$$=9$$

(別解)

$$\int_{-1}^{2}\left(3x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{2}3x^2\,dx-\int_{-1}^{2}\frac{2}{3}xdx+\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}dx \quad \text{[B]}$$

$$=[x^3]_{-1}^{2}-\left[\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x\right]_{-1}^{2}$$

$$=2^3-(-1)^3-\frac{1}{3}\{2^2-(-1)^2\}+\frac{1}{3}\{2-(-1)\}$$

$$=9$$

[A]　定積分
関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

[B]　定積分の性質
$k,\ l$ は定数とすると

$$\int_a^b\{kf(x)\pm lg(x)\}dx$$

$$=k\int_a^b f(x)dx\pm l\int_a^b g(x)dx$$

（複号同順）

2 [正解] イウエ：-66

[解説]

$$\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt+\int_{3}^{-1}(3t^2+2)(1-3t)dt$$

$$=\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt-\int_{3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt$$

$$=\int_{-3}^{-1}(3t^2+2)(3t-1)dt$$

$$+\int_{-1}^{3}(3t^2+2)(3t-1)dt \quad \text{[C]}$$

$$=\int_{-3}^{3}(3t^2+2)(3t-1)dt \quad \text{[D]}$$

$$=\int_{-3}^{3}(9t^3-3t^2+6t-2)dt$$

$$=2\int_{0}^{3}(-3t^2-2)dt \quad \text{[E]}$$

$$=-2\Big[t^3+2t\Big]_0^3$$

$$=-2(3^3+2\cdot 3)$$

$$=-66$$

[C]　定積分の性質

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

[D]　定積分の性質

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

[E]

n が奇数のとき　$\int_{-a}^{a} x^n\,dx=0$

n が偶数のとき　$\int_{-a}^{a} x^n\,dx=2\int_0^a x^n\,dx$